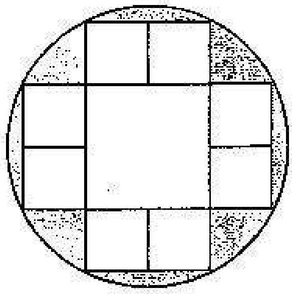
**Министарство просвете Републике Србије**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 17.04.2010.

## VIII РАЗРЕД

1. Производ два природна броја је два пута већи од њиховог збира. О којим бројевима је реч?

2. У круг полупречника 1cm уцртано је 9 квадрата међу којима је 8 једнаких, тако да је по једно теме сваког од 8 једнаких квадрата на кружници (види слику). Израчунај површину дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата.



3. Тачка $A(32,76)$ спојена је са координатним почетком $O$. Колико тачака на дужи $OA$ има обе координате које су природни бројеви?

4. На ивицама $AB$ и $BC$ коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дате су тачке $M$ и $N$, такве да је $BN = BM$. Израчунај дужину дужи $BN$ ако раван $MND_1$ заклапа са равни $ABC$ угао од 45°, а ивица коцке је 10cm.

5. Папир правоугаоног облика исечемо на два дела. Затим један од добијених делова поново исечемо на 2 дела. Ово понављамо укупно 5 пута (сечења су увек по правој линији). Колико највише, а колико најмање темена могу имати све добијене фигуре заједно?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

**РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД**

1. Нека су $x$ и $y$ природни бројеви такви да је $xy = 2(x+y)$. Пребацивањем сабирака на леву страну и додавањем 4 добијамо $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, односно $(x-2)(y-2) = 4$ **(10 бодова)**. Како је $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$ онда је једно решење $x - 2 = 4$ и $y - 2 = 1$, $x = 6$ и $y = 3$, а друго решење је $x - 2 = 2$ и $y - 2 = 2$, $x = 4$ и $y = 4$ **(10 бодова)**. Задатак има два решења, а тражени бројеви су 6 и 3 или 4 и 4.
2. Нека је страница мањих квадрата $x$, тада је страница већег квадрата $2x$. Због симетрије и Питагорине теореме добијамо $(4x)^2 + (2x)^2 = 2^2$, односно $20x^2 = 4$, па је $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **(10 бодова)**. Површина круга је $1^2\pi$, док је површина квадрата једнака $8 \cdot x^2 + (2x)^2 = 12x^2 = \frac{12}{5}$. Површина дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата је $\pi - \frac{12}{5}$ **(10 бодова)**.
3. Једначина праве која садржи координатни почетак и тачку $A(32, 76)$ је $y = \frac{76}{32}x = \frac{19}{8}x$ **(5 бодова)**. Целобројне тачке на дужи $AO$ имају $x$ координату између 0 и 32. Из горњег услова $x$ мора бити дељиво са 8 **(7 бодова)**. Према томе, једине целобројне тачке имају $x$ координате 0, 8, 16 и 32, односно то су тачке (0,0), (8,19), (16,38), (32,76) **(8 бодова)**.
4. Нека је $P$ средина дужи $MN$. Због симетрије тачка $P$ се налази на дијагонали основе $BD$. Угао између равни $MND_1$ и $ABC$ је управо $\angle DPD_1 = 45^\circ$ **(5 бодова)**. Зато је $DP = DD_1 = 10$. Из једнакокрако правоуглог троугла $BMN$ добијамо да је $BP = PN = PM = \frac{x}{\sqrt{2}}$, где је $BN = BM = x$ **(5 бодова)**. Сада је $BD = 10\sqrt{2} = DP + PB = 10 + \frac{x}{\sqrt{2}}$ и коначно $BN = x = (20 - 10\sqrt{2})cm$ **(10 бодова)**.
5. Сећи сваки пут четвороугао на два четвороугла. После пет сечења добијамо шест четвороуглова који имају 24 темена **(10 бодова)**. Сечењем правоугаоника на два троугла и после троугла на два троугла, добијамо шест троуглова који имају 18 темена **(10 бодова)**.